Complex Leech lattice と Sporadic Suzuki group(有限群論)

吉荒, 聡

数理解析研究所講究録
475巻 1982年 26-46

Complex Leech lattice と Sporadic Suzuki group

東大 理学部　吉荒 聡
(Satoshi Yoshiara)

§1　単純群の極大部分群分類問題

有限群のうちで essential な存在である有限単純群に関する様々な疑問 ― どの位存在するのか，どんな部分群構造を持つか ― 等々は有限群論の重要な推進力のひとつであった。有限単純群の分類が完成された今日，その部分群構造の決定は残された重要課題のひとつであろう。すなわち，与えられた有限単純群が含む部分群，それらの交わり方，等々を調べる必要がある。前者は次の問題(＊)に帰着される。

(＊) 与えられた有限単純群 G に対し，G の極大部分群の共役類の完全代表系を求める。

(＊) はごく自然な問題ゆえ，群論創始以来数多くの研究がなされている。

$L_2(q)$: Dickson [8]

$L_3(q)$, $U_3(q)$; Bloom [1], Hartley [13], Mitchell [17]

$Sz(q)$: Suzuki [21]

$Sp_4(q)$; q=odd Mitchell [18] , q=even Mwene [19]

$G_2(4)$; Butler [3], Petron-Tchakerian [20], Wilson [24]

$G_2(q)$; q=even Cooperstein [6],

${}^2F_4(2)'$: Tchackerian [22]

$L_4(q)$: q=even Mwene [19]

Mathieu 群 $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$

Chang-Choi および Conway [5]

HS : Magliveras [16]

J_1 : Janko [14]

J_2 , J_3 : Finkelstein-Rudvalis [12] , [11]

M^c, $\cdot 3$: Finkelstein [10]

He : Butler [2]

筆者は sporadic simple group Suz に対する問題(*)を考え次の結論を得た。[26]

<u>Theorem</u> Suz の極大部分群の共役類分割の完全代表系は次のリストに含まれる。

$2_-^{1+6}.U_4(2)$, $2^{2+8} \rtimes (A_5 \times \Sigma_3)$, $2^{4+6} \rtimes Z_3 \cdot A_6$,

$Z_3 \cdot U_4(3) \cdot Z_2$, $3^{2+4} \rtimes Z_2(A_4 \times E_4).Z_2$, $3^5 \rtimes M_{11}$,

$(2^2 \times L_3(4)).\Sigma_3$, $(3^2 \times A_6).Q_8$

$(A_5 \times A_6).Z_2$, $M_{12}.Z_2$, $J_2.Z_2$, $U_5(2)$, $G_2(4)$,

$*L_3(3).Z_2$ (2-classes), $*L_2(25)$, $*A_7$

このうち $*EP$のもの以外は確かに存在する。

<u>Notation</u> 上記において，p^n は order p^n の elementary abelian group, Z_m は order m の cyclic group, p^{a+b} は $P' \cong p^a$, $P/P' \cong p^b$ なる special group, 2^{1+6}_- は negative type の extra special 2-group (order 2^7) をあらわす。Σ_n, A_n は n次対称，交代群，Q_8 は order 8 の quaternion group。

<u>注意</u>：Wilson は Computor を用いて上記の3つの $*EP$ の subgroup の存在を示した。[24].

筆者の知る所では，次の単純群についても右記の人々が問題(*)を考察中ないしは解決した由である。

Suz		Wilson [24], Yoshiara [26]	決定
$\cdot 1$		Curtis [7] + Wilson [25]	決定
$\cdot 2$		Wilson	(多分決定
$G_2(q)$	$q=$odd	Ed Miglione	(多分)決定
${}^2F_4(2^{2m+1})$		John Sarli	
Ly		Andrew Waldan	
$O'N$		Yoshiara	Maximal local は決定.

なお，Fischer の群 F_{22}, F_{23} については特別な形の subgroup のリストが存在する。(Enright [9])

以下，本稿では Complex Leech lattice 及びその自己同型群の factor group としての sporadic Suzuki group の定義（§2）より始めて，その基本的性質を幾つか紹介する。（§3）§3の内容は大体においては新しいものではないが，ここに述べる形で書かれたことは無いので（Complex Leech lattice を扱った論文としては Lindsey [15] が唯一のものであろう。）"Complex Leech lattice Λ" の意味を込めて，まとめておく。（証明等詳しくは [27] を見よ。）

§4では§3で準備した Complex Leech lattice の解析を通じて得られる顕著な 3-local group の幾つかを記述する。

なお，§3で見るように Complex Leech lattice の係数制限は Real Leech lattice として良く知られたものであるが（例えば Conway [5]）Complex Leech lattice 自身がある $\mathbb{Q}(i,j,k)^6$ の $\mathbb{Z}[i,j,k,\frac{1}{2}(1+i+j+k)]$-module の係数制限となっている。（ここで，$\mathbb{Q}(i,j,k)$ は $\mathbb{Q}$ 上の4元数環。）この module $\hat{\Lambda}$（Quaternionic Leech lattice とよぶ）に対応する群は $G_2(4)$ であり，$\hat{\Lambda}$ を通じて $G_2(4)$ の諸性質を解明しうると共に，$G_2(4) \subseteq Sz$ となるから，Sz 自身の subgroup の構造決定にも深くかかわってくる。この辺の事情の詳しい解説は Wilson [23] または [28] を参照されたい。

§2　基本概念の定義

Notation

$\Omega := \mathbb{F}_{11}$ 上の projective line $= \{\infty, 0, 1, \cdots, 10\}$

$Q := \mathbb{F}_{11}$ の平方元 $= \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{11}\}$

$N := \Omega - Q$

$i \in \mathbb{F}_{11} = \{0, \cdots, 10\}$ に対して $N_i := \{n - i \mid n \in N\}$

$Q_i := \{q - i \mid q \in Q\}$;　$N_\infty = \Omega$　とおく。

$\mathbb{F}_3$ 成分の1行12列 vector 全体のなす空間を $\mathbb{F}_3{}^{12}$ と書き，natural basis を Ω で index 付けて $\{e_\infty, e_0, \cdots, e_{10}\}$ とする。$\mathbb{F}_3{}^{12} \ni X = \sum_{i=\infty}^{10} x_i e_i$ を $(x_i)_{i=\infty}^{10}$ とも書き，$\{i \in \Omega \mid x_i \neq 0\}$ を X の support，$\{i \in \Omega \mid x_i = 1\}$ を X の positive support，support の濃度を Weight とよぶ。また $X \subseteq \Omega$ に対して $\sum_{x \in X} e_x$ のことを，e_X と略記する。

（定義 1.）$C_\infty := e_\Omega = (1, \cdots, 1)$

$C_i := e_{N_i} - e_{Q_i} = (\underbrace{1^6}_{N_i}, \underbrace{(-1)^6}_{Q_i})$　$(i \in \mathbb{F}_{11})$

とおくとき，これらの張る $\mathbb{F}_3{}^{12}$ の subspace

$\mathcal{C} := \langle C_\infty, C_0, \cdots, C_{10} \rangle$ を ternary Golay code とよび，

$\{\sigma : \{e_\infty, \cdots, e_{10}\}$ に関する単項行列 $\mid \mathcal{C}^\sigma = \mathcal{C}\}$

を $\mathcal{C}$ の自己同型群 と呼び $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ と記す。

次に，複素数体 $\mathbb{C}$ における 1 の原始 3 乗根 $\omega = -1+\sqrt{-3}/2$ をとり，$\theta := \sqrt{-3}$ とおく。$\mathbb{Z}$ に ω を添加した ring $\mathbb{Z}[\omega] = \{\frac{1}{2}(a+b\theta) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \bmod 2\}$ を R とおく。

θR は R の ideal であり $R/\theta R \cong \mathbb{F}_3$，この代表系として $\{0, \pm 1\}$ がとれる。

今，3 元体 $\mathbb{F}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を代表系 $\{0, \pm 1\}$ と同一視して $\mathbb{Z}$ の subset と見なし，$\mathbb{F}_3^{12} \subseteq \mathbb{Z}^{12}$（整数成分の 1 行 12 列ベクトルの全体）$\subseteq R^{12}$（$R$ 成分の 1 行 12 列ベクトル全体のなす R-module）とみる。この同一視のもとで，

（定義 2.）次の R^{12} の subset を <u>Complex Leech lattice</u> とよび Λ であらわす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{0} + \theta c + 3X \\ \mathbb{1} + \theta c + 3Y \\ -\mathbb{1} + \theta c + 3Z \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} X = (x_i),\ Y = (y_i),\ Z = (z_i) \in R^{12} \\ \sum_{i=\infty}^{12} x_i \equiv 0,\ \sum_{i=\infty}^{12} y_i \equiv 1,\ \sum_{i=\infty}^{12} z_i \equiv -1 \bmod \theta \\ c \in \mathcal{C} \end{array} \right\}$$

ここで，$\mathbb{1} = (1, \cdots, 1)$

また $\{\sigma : \mathbb{Q}(\omega)$ 成分の 12 次ユニタリ 行列 $\mid \Lambda^\sigma = \Lambda\}$ を <u>Λ の自己同型群</u> とよび，これを $\mathrm{Aut}\,\Lambda = \widehat{G}$ と書く。

Λ は R^{12} の lattice；有限生成 R-module で，$\mathbb{Q}(\omega)\Lambda = \mathbb{Q}(\omega)^{12}$；が示される。また order 6 のスカラー行列 $-\omega I \in \widehat{G} = \mathrm{Aut}\,\Lambda$ は明らかであるが，factor group $\widehat{G}/\langle -\omega I \rangle =: G$ は simple group である事も示される。

$G = \mathrm{Aut}\Lambda / \langle -\omega I \rangle$ を Sporadic Suzuki group と呼ぶ。

以下，G の基本的性質の幾つかと，その為に必要な ternary Golay code $\mathcal{C}$，complex Leech lattice Λ ならびに $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$，$\mathrm{Aut}\,\Lambda$ の幾つかの性質を証明なしに述べる。
（証明等詳しくは [27] を参照）

§3 諸性質

(1) ternary Golay code $\mathcal{C}$ と，M_{11} の 12 点置換表現.

ternary Golay code $\mathcal{C}$ は次の $3^6 = 729$ 個のベクトルから成る。

Weight	形	positive support	個数
0	0	ϕ	1
6	① $\mp \mathbb{C}_i + \mathbb{C}_\infty = \pm(1^6\, 0^6)$	$N_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	② $\pm \mathbb{C}_i - \mathbb{C}_\infty = \pm(1^6\, 0^6)$	$Q_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	③ $\pm \mathbb{C}_i \pm \mathbb{C}_j = (\overset{\{a,b,c\}}{1^3}, -1^3, 0^6)$	Ωの任意の3点 a, b, c	$\binom{12}{3}$
9	① $\pm \mathbb{C}_i \pm \mathbb{C}_j + \mathbb{C}_\infty = (\underset{\{a,b,c\}}{-1^3}, 0^3, 1^6)$	Ωの任意の3点 a, b, c	$\binom{12}{3}$
	② ①の negative		$\binom{12}{3}$
12	① $\pm \mathbb{C}_i = \pm(1^6, -1^6)$	$N_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	② $\mathbb{C}_\infty$, ③ $-\mathbb{C}_\infty$	Ω	1×2

$\mathcal{C}$ の weight n のベクトル全体を $\mathcal{C}_n$ と書く。$\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の元は

単項行列ゆえ，ベクトルのweightを変えぬ。従って $Aut\,\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{12}$ 上に作用するが，これらはすべてtransitiveとなる。

特に $Aut\,\mathcal{C}$ は24点集合 $\mathcal{C}_{12}=\{\pm \mathbb{c}_i \mid i\in\Omega\}$ 上にtransitiveに作用し，従ってその符号を無視して得られる12個のpairのなす $C:=\{\{\pm \mathbb{c}_i\} \mid i\in\Omega\}$ 上にもtransitiveに作用する。

一方，単項行列のなす群として $Aut\,\mathcal{C}$ は24点集合 $\{\pm \mathbb{e}_i \mid i\in\Omega\}$ 上，従って12個のpair $E:=\{\{\pm \mathbb{e}_i\} \mid i\in\Omega\}$ 上に（transitiveに）作用する。

E および C への作用の核は $\langle -I\rangle$ であり，$M:=Aut\,\mathcal{C}/\langle -I\rangle$ とおけば (M, E) は単項行列が Ω 上にひきおこす自然な置換群であり，（M_{12}, naturalな12点）と置換群として同型である事が示される。（M_{12} は12次Mathieu群）

もうひとつの12点集合 C 上の置換表現 (M, C) は，上の $M\cong M_{12}$ の自然表現とは同値にならない。実際，(M, C) の1点 $\{\pm \mathbb{c}_\infty\}$ のstabilizerは，$Aut\,\mathcal{C}$ の中の置換行列全体のなす群 P と同型で，E 上3重可移となる事が示される。

この $Aut\,\mathcal{C}$ のpermutation part P は，抽象群としては，(M_{12}, E) の1点のstabilizer M_{11}（11次Mathieu群）と同型となる事が示されるので，(P, C) は M_{11} の12点置換表現を与える。

P の $\mathcal{C}$ への作用により次の表で，$\mathcal{C}_6$ の①,②,③；$\mathcal{C}_9$ の①,②;

$\mathcal{C}_{12}$の0, $\mathcal{C}_\infty$, $-\mathcal{C}_\infty$はそれぞれR-orbitとなる。

(2) Complex Leech lattice Λ ; Λ_2, Λ_3 および cross.

$X \in \Lambda$ に対し, $g(X) = \frac{2}{9}\sum_{i=\infty}^{10}|x_i|^2$ ($X = (x_i)_{i=\infty}^{10}$; $|x_i|^2 = x_i\overline{x_i}$; $\overline{x_i}$ は x_i の複素共役) とおいて二次形式gを定義すれば, $g(X)$はeven integerで, $g(X) = 2$ とみたす $X \in \Lambda$ は存在しない。すなわち, R-module Λ を $\mathbb{Z}$-module とみなして得られる $\mathbb{Q}^{24}$ の lattice $\Lambda|\mathbb{Z}$ は g より導かれる2次形式 g' に対し, even lattice かつ $g'(X) = 2$ なる $X \in \Lambda|\mathbb{Z}$ を持たぬが 更に $\Lambda|\mathbb{Z}$ は unimodular (i.e. g' に associate する双1次形式を $b_{g'}$ と書くとき $\Lambda|\mathbb{Z} = \{X \in \mathbb{Q}^{24} \mid b_{g'}(X, Y) \in \mathbb{Z}\ (\forall Y \in \Lambda|\mathbb{Z})\}$) である事もわかる。従って, Conway [4] により $\Lambda|\mathbb{Z} \cong$ Real Leech lattice となる。これは Λ を complex Leech lattice と呼ぶ事の正当化である。

$\Lambda_n := \{X \in \Lambda \mid g(X) = 2n\}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) とおく。$\Lambda_0 = \{0\}$, 上の注意から $\Lambda_1 = \phi$. 慎重な計算により, Λ_2, Λ_3 の vector の個数と形が求められる。

$|\Lambda_2| = 196,560$, $|\Lambda_3| = 16,773,120$.

(定義 3.) R-module Λ の submodule $\theta\Lambda = \{\theta X \mid X \in \Lambda\}$ による factor module $\overline{\Lambda} = \Lambda/\theta\Lambda = \{X + \theta\Lambda \mid X \in \Lambda\}$ を Λ の <u>mod θ の reduction</u> とよぶ。Λ_2, Λ_3 の natural projection $p : \Lambda \longrightarrow \overline{\Lambda}$ による image を $\overline{\Lambda}_2$, $\overline{\Lambda}_3$ と書く。

一般に，$\mathfrak{X}\in\Lambda$ に対して，$p(\mathfrak{X})=p(\omega\mathfrak{X})=p(\bar{\omega}\mathfrak{X})$ 及び $\mathfrak{X}\neq 0$ ならば $p(\mathfrak{X})\neq p(-\mathfrak{X})$ である事に注意する。

次の重要な lemma が示される。

<u>lemma</u>. $\bar{\Lambda}=\{\bar{0}\}+\bar{\Lambda}_2+\bar{\Lambda}_3$ と分解される。

また，p は Λ_2 上 3対1，Λ_3 上 $3\cdot 12$ 対1の map。

$\bar{\mathfrak{X}}\in\bar{\Lambda}_2$ ($\mathfrak{X}\in\Lambda_2$) に対し $p^{-1}(\bar{\mathfrak{X}})=\langle\omega\rangle\mathfrak{X}=\{\mathfrak{X},\omega\mathfrak{X},\bar{\omega}\mathfrak{X}\}$。

$\bar{\mathfrak{X}}\in\bar{\Lambda}_3$ ($\mathfrak{X}\in\Lambda_3$) に対し，$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1$ を含む Λ_3 の12個の vector $\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\dots,\mathfrak{X}_{12}\}$ で，$p^{-1}(\bar{\mathfrak{X}})=\{\langle\omega\rangle\mathfrak{X}_1,\langle\omega\rangle\mathfrak{X}_2,\dots,\langle\omega\rangle\mathfrak{X}_{12}\}$ をみたすものが unique に存在する。また g に付随する双1次形式 h に関し，$\mathfrak{X}_i,\mathfrak{X}_j$ $(1\le{}^{\forall}i\neq j\le 12)$ は直交する。

例えば，${}^{\forall}i\in\Omega$ に対し $\mathfrak{S}_i:=(\overset{i}{3}\theta,0^{11})$ とおけば $\mathfrak{S}_i=0+\theta\cdot 0+3(\overset{i}{\theta},0^{11})\in\Lambda$ であり，$h(\mathfrak{S}_i,\mathfrak{S}_j)=0$ $({}^{\forall}i\neq j)$。また，

$\mathfrak{S}_i-\mathfrak{S}_j=\theta(\overset{i}{3},\overset{j}{-3},0^{10})$ で

$(\overset{i}{3},\overset{j}{-3},0^{10})=0+\theta\cdot 0+3(\overset{i}{1},\overset{j}{-1},0^{10})\in\Lambda$ ゆえ

$\mathfrak{S}_i-\mathfrak{S}_j\in\theta\Lambda$. i.e. $p(\mathfrak{S}_i)=p(\mathfrak{S}_j)$。

従って，lemma から $p^{-1}(\bar{\mathfrak{S}}_\infty)=\{\langle\omega\rangle\mathfrak{S}_\infty,\langle\omega\rangle\mathfrak{S}_0,\dots,\langle\omega\rangle\mathfrak{S}_{10}\}$

この $\{\mathfrak{S}_\infty,\mathfrak{S}_0,\dots,\mathfrak{S}_{10}\}$ は Λ における直交座標軸の集合ともいうべき自然な対象である。そこで，

（定義 4.）Λ_3 の12個のベクトル $\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_{12}$ が

(1) $h(\mathfrak{X}_i,\mathfrak{X}_j)=0$ $\quad(1\le{}^{\forall}i\neq j\le 12)$

(2) $\mathfrak{X}_i-\mathfrak{X}_j\in\theta\Lambda$ $\quad(1\le{}^{\forall}i,j\le 12)$

とみたすとき，12個の rank 1 の R-submodules のなす unordered set $\{Rx_1, Rx_2, \cdots, Rx_{12}\}$ を cross とよび，各 Rx_i を axis と呼ぶ。

lemma から，任意の $x \in \Lambda_3$ に対し x を含む cross は unique に存在する。例えば先の $\delta_\infty = (3\overset{\infty}{0}, 0'')$ を含む unique cross は $\{R\delta_\infty, R\delta_0, \cdots, R\delta_{10}\}$ である。この cross を standard cross とよび，S であらわす。

Λ の cross の全体を $\mathcal{S}$ と書くと，$\Lambda_3 \ni p(x_1), -p(x_1) \longmapsto \{Rx_1, \cdots, Rx_{12}\}$ (x_1 を含む unique cross) $\in \mathcal{S}$ により，$|\mathcal{S}| = |\Lambda_3|/2 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ である。

(3) Monomial subgroup，行列式，G の order と simplicity.

以後 Λ_2, Λ_3 のかわりに，その符号を無視した pair より成る集合 $\{\{\pm x\} \mid x \in \Lambda_2\}$ 等を考え，これも同じく Λ_2, Λ_3 と書く。Aut Λ の元はユニタリ行列ゆえ，f を保つから Λ_2, Λ_3 に作用する。$\theta\Lambda$ も不変にするから，本来の意味での Λ_2, Λ_3，従って，その符号を無視した Λ_2, Λ_3 上にも作用する。この核は $\langle -\omega I \rangle$ であり，$G = \widetilde{G}/\langle -\omega I \rangle$ は Λ_2, Λ_3 上 faithful に作用。

Λ_3 の 1点 $\{\pm p(\delta_\infty)\}$ をとれば，G におけるこの点の stabilizer は，Aut Λ における standard cross S の stabilizer M の image $\overline{M} (\subseteq G)$ である。M および $\overline{M} = M/\langle -\omega I \rangle$ を monomial subgroup とよぶ。

$$M=\left\{\sigma\in\mathrm{Aut}\,\Lambda \;\middle|\; \begin{array}{l}\forall i\in\Omega \text{ に対し}, \exists j\in\Omega \text{ をとれば}\\ (R\mathfrak{x}_i)^\sigma=R\mathfrak{x}_j\end{array}\right\}$$

である。$\mathrm{Aut}\,\Lambda$ は g を保つから、$\mathbb{Z}[\omega]=R$ の unit group $\langle-\omega\rangle\cong Z_6$ を U と書くとき、$\mathfrak{x}_i^\sigma\in R\mathfrak{x}_j\cap\Lambda_3=U\mathfrak{x}_j$.
そこで、M は U 成分の単項行列となる。

Λ の定義から、S の各 axis をすべて fix する M の subgroup D_0 は、$D_0=\langle-I\rangle\times D$、ここでアーベル群として $D\cong\mathcal{C}$ (ternary Golay code) という構造を持つ事がわかる。

$\mathcal{C}\ni\underset{(c_i)}{\mathbb{c}}$ に対し、行列 $d(\mathbb{c})\in D$ を、次の $d(c_i)$ を (i,i)

$$d(c_i):=\omega^{c_i}=\begin{cases}1 & \text{if } c_i=0\\ \omega & c_i=1\\ \bar{\omega} & c_i=-1\end{cases}$$

成分とする対角行列として定義すれば、$\mathbb{c}\longmapsto d(\mathbb{c})$ が上の同型 $D\cong\mathcal{C}$ を与える。

また $\mathrm{Aut}\,\Lambda$ の元は Λ 上への $\omega\in R$ の作用（これは D の元 $\omega I=(\omega,\cdots,\omega)$ 従って上の対応を通じて $(1,\cdots,1)=\mathbb{c}_\infty$ なる $\mathcal{C}$ のベクトルと対応）と可換ゆえ、$\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ における $\mathbb{c}_\infty$ の stabilizer $P\cong M_{11}$ ($\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の permutation part) に対応する置換群（これも同じく P であらわす）が $M\subseteq\mathrm{Aut}\,\Lambda$ 中にあらわれる。

実は、$M=\langle-I\rangle\times(D_0\rtimes P)$ である。Λ_2,Λ_3 の M-orbit 分解を慎重に計算すると次の表の如くである。

Λ_2

代表元 $\mathbb{x}=(x_i)$	$\{\lvert x_\infty\rvert^2,\cdots,\lvert x_{10}\rvert^2\}$	orbitの濃度
(1) $(\underbrace{\theta^6}_{N}, 0^6)$	$\{3^6, 0^6\}$	$22\cdot3^5\cdot2$
(2) $(\underbrace{\theta^3}_{T_1}, \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4}; 0^6)$	$\{3^6, 0^6\}$	$110\cdot3^5\cdot2$
(3) $(\overset{\infty}{3}, \overset{6}{-3}, 0^{10})$	$\{9^2, 0^{10}\}$	$3^2\cdot11\cdot12$
(4) $(\overset{\infty}{-2}, \overset{6}{-2}, 1^{10})$	$\{4^2, 1^{10}\}$	$2\cdot3^6\cdot\binom{12}{2}$
(5) $(\overset{\infty}{-2}+\theta, \underbrace{\overline{\omega}^5}_{N}; 1^6)$	$\{7, 1^{11}\}$	$2\cdot3^6\cdot12$
(6) $(\overset{\infty}{-2}-\theta, \underbrace{\omega^5}_{N}; 1^6)$	$\{7, 1^{11}\}$	$2\cdot3^6\cdot12$

Λ_3 表中で $T_1=\{\infty, 6, 7\}$, $T_2=\{8, 10, 2\}$, $T_3=\{1, 9, 5\}$, $T_4=\{0, 4, 3\}$,

代表元 $\mathbb{x}=(x_i)$	$\{\lvert x_\infty\rvert^2,\cdots,\lvert x_{10}\rvert^2\}$	orbitの濃度
(1) $(\underbrace{(-\theta)^3}_{T_1}, \theta^6, \underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^3\cdot3^6\cdot5\cdot11$
(2) $(\underset{\infty}{\theta}, \underset{6}{\theta\omega}, \underset{7}{\theta\overline{\omega}}; (-\theta)^6, \underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^4\cdot3^7\cdot5\cdot11$
(3) $(\underbrace{\omega\theta, \theta, \theta}_{T_1}; \underbrace{-\overset{8}{\omega\theta}, -\theta, -\theta}_{T_2}; \underbrace{(-\theta)^3}_{T_3}\underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^4\cdot3^6\cdot5\cdot11$
(4) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\overline{\omega}}, \theta^5}_{N}; \overset{3}{3}, 0^5)$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^3\cdot3^3\cdot11$
(5) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\omega}, \theta^5}_{N}; -3, 0^5)$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^3\cdot3^3\cdot11$
(6) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\overline{\omega}}, \theta^2}_{T_1}; \overset{8}{3}, 0^5; \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4})$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^4\cdot3^3\cdot5\cdot11$
(7) $(\underbrace{3^3}_{T_1}, 0^9)$	$\{9^3, 0^9\}$	$2\cdot3^3\binom{12}{3}$
(8) $(\underbrace{\theta^6}_{N}; -2\overset{6}{\overline{\omega}}\theta, 0^5)$	$\{12, 3^5, 0^6\}$	$2\cdot3^5\cdot22\cdot6$
(9) $(\underbrace{\theta^3}_{T_1}, \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4}; -2\overset{8}{\overline{\omega}}\theta, 0^5)$	$\{12, 3^5, 0^6\}$	$2\cdot3^5\cdot110\cdot6$
(10) $(\overset{\infty}{3\theta}, 0^{11})$	$\{27, 0^{11}\}$	$12\cdot6$
(11) $(\underbrace{\overset{\infty}{1}, (-2)^5}_{N}, 0^6)$	$\{4^5, 1^7\}$	$2\cdot3^6\cdot132$
(12) $(\underbrace{\overset{\infty}{1}, (-2)^2}_{T_1}, \underbrace{(-2)^3}_{T_4}, 1^3)$	$\{4^5, 1^7\}$	$2\cdot3^6\cdot6\cdot110$

代表元 $\mathbb{X}=(x_i)$	$\{\lvert x_\infty\rvert^2, \cdots, \lvert x_{10}\rvert^2\}$	orbitの濃度
(13) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar{\omega}^2}_{T_1}, \underbrace{(-2\bar{\omega})^3}_{T_2}; 1^6)$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(14) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar{\omega}^2}_{T_1}; 1^6; \underbrace{(-2\omega)^3}_{T_4})$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^2\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(15) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_1}, \underbrace{(-2\omega)^3}_{T_2}; 1^6)$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(16) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_1}; 1^6; \underbrace{(-2\bar{\omega})^3}_{T_4})$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(17) $(\underbrace{\overset{\{\infty,6\}}{(-2+\theta)^2}, (\bar{\omega})^4}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 660$
(18) $(\underbrace{(-2-\theta)^2, \omega^4}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 660$
(19) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar{\omega}^2}_{T_1}; \overset{1}{-2}, 1^6; \underbrace{\overset{0}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_4})$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 11\cdot 10$
(20) $(\underbrace{\overset{\infty}{1+2\theta}, \omega^5}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{13, 4, 1^{10}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 11$
(21) $(\underbrace{\overset{\infty}{1-2\theta}, \bar{\omega}^5}_{N}, \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{13, 4, 1^{10}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 11$
(22) $(\overset{\infty}{4}, 1^{11})$	$\{16, 1^{11}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12$

更に、

$$U(i,j,k) := \frac{1}{\theta} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \bar{\omega} \\ 1 & \bar{\omega} & \omega \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array}$$

とおき、行列の直和

$$\xi := U(\infty,6,7) \oplus \overline{U}(8,10,2) \oplus \overline{U}(1,9,5) \oplus U(0,4,3)$$

を作ればこれは12次ユニタリ行列であるが Λ を保つ事がcheckされる。すなわち、$\xi \in \mathrm{Aut}\,\Lambda = \tilde{G}$.

上の Λ_2, Λ_3 の M-orbitの代表元等を ξ で動かしてみることにより、$\langle \xi, M\rangle$ は Λ_2, Λ_3 上それぞれ transitive となる事が示される。特に、$G = \tilde{G}/\langle -\omega I\rangle$ は、$\overline{\Lambda}_2, \overline{\Lambda}_3$ 上 transitive であり、前に注意した如く、$\overline{\Lambda}_3$ の点 $\{\pm p(\delta_\infty)\}$ の G における

stabilizer は $\overline{M} = D_0/\langle\omega I\rangle \rtimes P \cong 3^5 \rtimes M_{11}$ (3^5 は order 3^5 の elementary abelian 3-group をあらわす。以後も従う。) であり、
$|\Lambda_3| = |\mathcal{S}| = 2^9\cdot 5\cdot 7\cdot 13$ ゆえ、G の order は、
$|G| = |\Lambda_3|\cdot|\overline{M}| = (2^9\cdot 5\cdot 7\cdot 13)\cdot 3^5 \times 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = 2^{13} 3^7 5^2 7\cdot 11\cdot 13$
と定まる。(ここの Λ_3 は符号を無視した新たな Λ_3 である。)

更に、Aut Λ における $\bar{x} = (\overset{6}{3}, \overset{7}{-3}, 0^{10}) \in \Lambda_2$ の stabilizer が、ξ, $D_1 = \{d(C) \mid C$ は 6, 7 を support に含まぬ $\mathcal{C}$ の元$\}$, $P_{6,7} = \{\sigma \in P \mid 6^\sigma = 6, 7^\sigma = 7\}$ 等を含む事から、G における $\bar{x}$ の stabilizer $G_{\bar{x}}$ の Λ_2 ($196560/6 = |\Lambda_2|$) への作用における orbit が求められ、その size は 1, 891, 1980, 2816, 6336, 20736。($x \in \Lambda_2$ に対する通常の内積 $x\cdot y$ の値が $\langle-\omega\rangle 18, \langle-\omega\rangle 9, \langle-\omega\rangle 6\theta, \langle-\omega\rangle 3\theta, 0$; の 0 を除く各々の値に対する $y \in \Lambda_2$ の全体に G_x は transitive. $x\cdot y = 0$ なる $y \in \Lambda_2$ は 2つの G_x-orbit に分かれる。) この値から、(G, Λ_2) が primitive であることがわかる。(従って $G_{\bar{x}}$ は G の maximal group である!)

また、この事実と Aut Λ の元の固有値に対する簡単な注意により、あとは標準的な群論で G の simplicity が示される。

注意: 上の $\bar{x} \in \Lambda_2$ の stabilizer $G_{\bar{x}} \cong U_5(2)$ である事が G の maximal local subgroup の分類が終了した段階でわかる。多分、もっと explicit に同型を確認できるであろう。

§4 Some 3-locals in G

この§では前§の準備だけから見つかるMaximal 3-local group の候補（実際に maximal group になる）を記述する。

前§で見た通り，対応 $\mathbb{C} \longmapsto d(\mathbb{C})$ を通じて ternary Golay code $\mathcal{C}$ と Aut/L の subgroup D は $Aut\,\mathcal{C}$ の permutation part P の作用も込めて同型であった。$\mathcal{C}$ の P-orbit と $\mathcal{C}$ の元の表から $\overline{D} = D/\langle \omega I \rangle \subseteq G$ は P の作用で2個の orbits に分解する。代表元は $d(\mathbb{C}_i) = \omega_i$ と $d(\mathbb{C}_i+\mathbb{C}_j)=\omega_i\omega_j$ の image である。$|G|$ より，$\overline{D}\cdot P$ は G の 3-Sylow group を含むが $\overline{D}$ の外側の元は $\overline{M}=\overline{D}\cdot P$ で2つの共役類に分解し，前§の元 ξ により $\omega_i\omega_j$ とある $\overline{M}-\overline{D}$ の元は fuse する。mod $\langle -\omega \rangle$ でみた行列の trace をしらべればこうして得られた3つの $\langle \xi, \overline{M} \rangle$-class は fuse しえぬ。すなわち，$G$ の order 3 の元は3つの共役類に分かれる。ω_i, $\omega_i\omega_j$ を含む共役類を $\mathcal{C}_G(3A)$, $\mathcal{C}_G(3B)$, もうひとつを $\mathcal{C}_G(3C)$ と書く時，次が示せる。

<u>Lemma</u> ([26] Prop. 1.5) G の $\underbrace{\text{3-local}}_{\text{maximal}}$ group L に対して次のいずれかが成り立つ。

(1) $L = N_G(A)$ ここで, $A = \langle A\cap \mathcal{C}_G(3A) \rangle \ (\neq 1)$

(2) $L = N_G(A)$ ここで, $A^{\#} \subseteq \mathcal{C}_G(3C)$

以下(1)の形の3-local について述べる。$A \subseteq \overline{D}\cdot P$ としてよいから先の考察より $A \subseteq \overline{D}$ となる。Pの作用を考えるこ

とより $\overline{\omega}_0 \in A$ としてよい。また $|A| \geq 3^2$ ならば $\langle \overline{\omega}_0, \overline{\omega}_1 \rangle \subseteq A$ としてよい。

$D \supseteq X$ に対して, X が axis 毎に fix する cross の全体を $\Phi(X)$ と書く。例えば $\Phi(D) = \{S\}$ であり, 前から, S を axis 毎に fix する $\mathrm{Aut}\,\Lambda = \widetilde{C}$ の subgroup は $D \times \langle -I \rangle$ である。

簡単な計算で $\Phi(\langle \omega_\infty, \omega_0, \omega_1 \rangle) = \{S, D_1, D_2, D_3\}$ が示せる。ここで, S は standard cross, また D_1, D_2, D_3 は次の cross である。

$T_1 = \{\infty, 6, 7\}$, $T_2 = \{8, 10, 2\}$, $T_3 = \{1, 9, 5\}$, $T_4 = \{0, 4, 3\}$

とするとき,

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\omega, 3\overline{\omega}, 0^9) \\ R(3, 3\overline{\omega}, 3\omega, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3\omega}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\omega, 3, 0^9) \\ R(3\omega, 3, 3, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3\overline{\omega}}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\overline{\omega}, 3, 0^9) \\ R(3\overline{\omega}, 3, 3, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

さて, $\langle \omega_0, \omega_1, \omega_\infty \rangle \subsetneq A \subseteq D$ とすると, $\exists \omega_i \in A\ (i \neq 0, 1)$ であり, $\Phi(A) \subseteq \Phi(\langle \omega_0, \omega_1, \omega_\infty \rangle) = \{S, D_1, D_2, D_3\}$ は明らかだが ω_i は D_1, D_2, D_3 を axis 毎には fix しない。

よって, $\Phi(A)=\{S\}$である。$N_{\mathrm{Aut}\Lambda}(A)$は明らかに$\Phi(A)$に作用するから$S$をstabilizeし, 従って$N_{\mathrm{Aut}\Lambda}(A)\subseteq M$. $G=\mathrm{Aut}\Lambda/\langle -\omega_\infty\rangle$で考えれば$N_G(\bar{A})\subseteq\bar{M}$である。

従って, (1)の形のmaximal 3-localは$N_G(\langle\bar\omega_0\rangle)$, $N_G(\langle\bar\omega_0,\bar\omega_1\rangle)$または$N_G(\bar{D})=\bar{M}$のいずれかに共役でなければならぬ。

$N_G(\langle\bar\omega_0,\bar\omega_1\rangle)$の構造は, $\Phi(\langle\omega_0,\omega_1,\omega_\infty\rangle)=\{S,D_1,D_2,D_3\}$への作用の核(それは$S$をfixするから$M$に入る)を$M$中できちんと見る事, 及び4元集合$\Phi(\langle\omega_0,\omega_1,\omega_\infty\rangle)$上に$A_4$がひきおこされる事により定められて, $3^{2+4}\rtimes Z_2(A_4\times E_4).Z_2$と同型な群になる。

$N_G(\langle\bar\omega_0\rangle)$の構造は次の様に求められる。$\omega_0=(\overline{\omega^6}\,\widetilde{\overline{\omega^6}})$の固有値$\omega$に対する固有空間と$\Lambda$の共通部分であるrank 6のsublattice $\Gamma=\{x\in\Lambda\mid x^{\omega_0}=\omega x\}$, 更に$\Gamma$のmod θのreduction $\bar\Gamma=\Gamma/\theta\Gamma=\{x+\theta\Gamma\mid x\in\Gamma\}$を考える。$\bar\Gamma$は$F_3$上6次元のspaceであるがここに$\Lambda$の2次形式$g$の$\Gamma$への制限よりinduceされる2次形式$\bar g$: $\bar g(\bar x)=\frac{1}{2}g(x)\bmod\theta$ ($g(x)$はeven integerであった.)を入れる。この2次形式$\bar g$はnon-degenerateでnegative typeである事が示される。$C_{\mathrm{Aut}\Lambda}(\omega_0)$は$\bar\Gamma$に作用し(ユニタリ行列ゆえ)$g$従って$\bar g$を保つから, 作用の核で割った部分は$O^-(6,3)$のsubgroup, 実はその交換子となる事がわかる. 核は$\langle\omega_0,\omega_\infty\rangle$であることがわかり, これから$C_G(\bar\omega_0)\cong Z_3\cdot P\Omega^-(6,3)$がわかる. ($-I$は$O^-(6,3)$のスカラー行列になる.) また$D$で$\omega_0$をinvert

する元があるから, $C_G(\overline{\omega_0}) \cong Z_3 \cdot P\Omega^-(6,3) \cdot Z_2 \cong Z_3 \cdot U_4(3) \cdot Z_2$
(よく知られた同型 $P\Omega^-(6,3) \cong U_4(3)$.)

References

[1] Bloom, D. M., The subgroups of $PSL_3(q)$, for odd q, Trans. Amer. Math. Soc., 127 (1967) 150–178.

[2] Butler, G., The maximal subgroups of the sporadic simple group of Held, J. Algebra 69 (1981) 67–81.

[3] Butler, G., in [6]

[4] Conway, J. H., A characterization of Leech's lattice, Inventiones Math. 7 (1969) 137–142.

[5] Conway, J. H., Three lectures on exceptional groups, "Finite simple groups", Academic Press, London, 1971. chap. VII, 215–247.

[6] Cooperstein, B., Maximal subgroups of $G_2(2^n)$, J. Algebra, 70 (1981) 23–36.

[7] Curtis, R. T., On subgroups of $\cdot 0$, I Lattice stabilizers, II Local structure, J. Algebra 27 (1973), J. Algebra 63 (1980) 413–434.

[8] Dickson, L. E., Linear Groups, Dover, New York, 1958.

[9] Enright, G. M., Subgroups generated by transpositions in F_{22} and F_{23}, Comm. in Algebra, 6 (8), 823–837 (1978).

[10] Finkelstein, L., The maximal subgroups of Conway's group C_3 and McLaughlin's group, J. Algebra 25 (1973) 58-90.
[11] Finkelstein, L., and Rudvalis, A., Maximal subgroups of Janko's simple groups of order 50,232,960, J. Algebra 30 (1974), 122-143.
[12] Finkelstein, L., and Rudvalis, A., Maximal subgroups of the Hall-Janko-Wales group, J. Algebra 24 (1973), 486-493.
[13] Hartley, R.W., Determination of ternary collineation group whose coefficients lie in $GF(2^n)$. Ann. of Math. 27 (1925) 140-158.
[14] Janko, Z.A., A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups and its characterization, J. Algebra 3 (1966) 147-186.
[15] Lindsey, J.H, A correlations between $PS^6U_4(3)$, the Suzuki group and the Conway group, Trans. Amer. Math. Soc., 157 (1971) 189-204
[16] Magliveras, S.S., The subgroup structure of the Higman-Sims group, Bull. Amer. Math Soc., 77 (1971) 535-539.
[17] Mitchell, H.H., Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 12 (1911) 207-242.
[18] Mitchell, H.H., The subgroups of the quaternary abelian linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 15 (1914) 379-396.
[19] Mwene, B., On the subgroups of the group $PSL_4(2^n)$, J. Algebra 41 (1976) 79-107.
[20] Petrov. N and Tchackerian. K., The maximal subgroups of $G_2(4)$,

J. Algebra 76, 171–188 (1982)

[21] Suzuki, M., On a class of doubly transitive groups, Ann. Math. 75, 105–145 (1962).

[22] Tchakerian, K., The maximal subgroups of the Tits simple group Compus Rendus de l'academie Bulgare des sciences 34, N°12 (1981).

[23] Wilson, R. The Quaternionic lattice for $2G_2(4)$ and its maximal subgroups, J. Algebra 77, 441–466 (1982)

[24] Wilson, R. The Complex Leech lattice and the maximal subgroups of Suz, to appear in J. Algebra (?)

[25] Wilson, R. personal communication

[26] Yoshiara, S. 散在型鈴木単純群の極大部分群について 東大修士論文 1982

[27] Yoshiara, S. to appear

[28] Yoshiara, S. to appear